1.- Determine si el conjunto de vectores dado es linealmente dependiente o independiente

$$\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\9\\-4\end{pmatrix}$$

Solución

Para ver si los vectores son linealmente independientes buscamos el **vector cero** como combinación lineal de mis vectores, si la solución es con todos sus escalares ceros entonces serán linealmente independientes, de lo contrario serán linealmente dependientes, es decir, buscamos

$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}-2\\9\\-4\end{pmatrix}\quad \text{con } \alpha,\beta\ y\ \gamma \text{ escalares}$$

Entonces $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha\\3\alpha\\2\alpha\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\beta\\\beta\\\beta\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\gamma\\9\gamma\\-4\gamma\end{pmatrix}$

Lo que nos lleva al siguiente sistema de ecuaciones $\begin{matrix}\alpha+2\beta-2\gamma=0\\3\alpha+\beta+9\gamma=0\\2\alpha+\beta-4\gamma=0\end{matrix}$ es decir

$$\begin{pmatrix}1&2&-2&\mathbf{0}\\3&1&9&\mathbf{0}\\2&1&-4&\mathbf{0}\end{pmatrix}\begin{matrix}R_2\leftarrow -3R_1+R_2\\R_3\leftarrow -2R_1+R_3\end{matrix}\begin{pmatrix}1&2&-2&\mathbf{0}\\0&-5&15&\mathbf{0}\\0&-3&0&\mathbf{0}\end{pmatrix}\begin{matrix}R_2\leftarrow \frac{R_2}{-5}\\R_3\leftarrow\frac{R_3}{-3}\end{matrix}\begin{pmatrix}1&2&-2&\mathbf{0}\\0&1&-3&\mathbf{0}\\0&1&0&\mathbf{0}\end{pmatrix}$$

$$R_2\leftrightarrow R_3\begin{pmatrix}1&2&-2&\mathbf{0}\\0&1&0&\mathbf{0}\\0&1&-3&\mathbf{0}\end{pmatrix}R_3\leftarrow -R_2+R_3\begin{pmatrix}1&2&-2&\mathbf{0}\\0&1&0&\mathbf{0}\\0&0&-3&\mathbf{0}\end{pmatrix}$$

$$R_3\leftarrow\tfrac{R_3}{-3}\begin{pmatrix}1&2&-2&\mathbf{0}\\0&1&0&\mathbf{0}\\0&0&1&\mathbf{0}\end{pmatrix}R_1\leftarrow 2R_3+R_1\begin{pmatrix}1&2&0&\mathbf{0}\\0&1&0&\mathbf{0}\\0&0&1&\mathbf{0}\end{pmatrix}R_1\leftarrow -2R_2+R_1\begin{pmatrix}1&0&0&\mathbf{0}\\0&1&0&\mathbf{0}\\0&0&1&\mathbf{0}\end{pmatrix}$$

Lo que resulta $\alpha=0,\ \beta=0\ y\ \gamma=0$, es decir

$\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}=0\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}-2\\9\\-4\end{pmatrix}$, con esto vemos que la solución es con todos los escalares ceros, por lo tanto son linealmente ***independientes***.

2.- Determine si el conjunto de vectores dado es linealmente dependiente o independiente

$$\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-3\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$$

Solución

Para ver si los vectores son linealmente independientes buscamos el **vector cero** como combinación lineal de mis vectores, si la solución es con todos sus escalares ceros entonces serán linealmente independientes, de lo contrario serán linealmente dependientes, es decir, buscamos

$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}2\\-3\\4\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}\quad \text{con } \alpha,\beta \ y\ \gamma \text{ escalares}$$

Entonces $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\alpha\\2\alpha\\\alpha\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\beta\\-3\beta\\4\beta\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\gamma\\2\gamma\\-\gamma\end{pmatrix}$

Lo que nos lleva al siguiente sistema de ecuaciones $\begin{matrix}3\alpha+2\beta+\gamma=0\\2\alpha+3\beta+2\gamma=0\\\alpha+4\beta-\gamma=0\end{matrix}$ es decir

$$\begin{pmatrix}3&2&1&\mathbf{0}\\2&-3&2&\mathbf{0}\\1&4&-1&\mathbf{0}\end{pmatrix}R_1\leftrightarrow R_3\begin{pmatrix}1&4&-1&\mathbf{0}\\2&3&2&\mathbf{0}\\3&2&1&\mathbf{0}\end{pmatrix}\begin{matrix}R_2\leftarrow -2R_1+R_2\\R_3\leftarrow -3R_1+R_3\end{matrix}\begin{pmatrix}1&4&-1&\mathbf{0}\\0&-11&4&\mathbf{0}\\0&-10&4&\mathbf{0}\end{pmatrix}$$

$$R_2\leftarrow -R_2+R_3\begin{pmatrix}1&4&-1&\mathbf{0}\\0&-11&4&\mathbf{0}\\0&1&0&\mathbf{0}\end{pmatrix}R_2\leftrightarrow R_3\begin{pmatrix}1&4&-1&\mathbf{0}\\0&1&0&\mathbf{0}\\0&-11&4&\mathbf{0}\end{pmatrix}$$

$$R_3\leftarrow 11R_2+R_3\begin{pmatrix}1&4&-1&\mathbf{0}\\0&1&0&\mathbf{0}\\0&0&4&\mathbf{0}\end{pmatrix}R_3\leftarrow\frac{R_3}{4}\begin{pmatrix}1&4&-1&\mathbf{0}\\0&1&0&\mathbf{0}\\0&0&1&\mathbf{0}\end{pmatrix}$$

$$R_1\leftarrow -4R_2+R_1\begin{pmatrix}1&0&-1&\mathbf{0}\\0&1&0&\mathbf{0}\\0&0&1&\mathbf{0}\end{pmatrix}R_1\leftarrow R_3+R_1\begin{pmatrix}1&0&0&\mathbf{0}\\0&1&0&\mathbf{0}\\0&0&1&\mathbf{0}\end{pmatrix}$$

Lo que resulta $\alpha=0,\ \beta=0\ y\ \gamma=0$, es decir

$\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}=0\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}2\\-3\\4\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$, con esto vemos que la solución es con todos los escalares ceros, por lo tanto son linealmente ***independientes***.

Ejercicios

1.- Determine si el conjunto de vectores dado es linealmente dependiente o independiente

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Respuesta: Independientes

2.- Determine si el conjunto de vectores dado es linealmente dependiente o independiente

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Respuesta: Independientes